文章编号:1000-4939(2022)06-1135-06

# 具指数衰减函数边界的一维热传导问题的解及其应用

韦婷[1],陶月赞[1],任红蕾[1],吴丹[2]

(1. 合肥工业大学土木与水利工程学院,230009 合肥;2. 合肥学院城市建设与交通学院,230601 合肥)

**摘 要**:边界条件为指数衰减函数的一维热传导问题,Laplace 正变换后泛定方程的通解与边界条件象函数的乘积组合求逆困难,问题难以求解。应用 Laplace 变换性质,将边界条件用算符运行于变换过程中,建立一维热传导问题通用的理论解;再将特定问题的边界条件代入通用理论解,获得相应的解。根据边界条件为指数衰减函数时的解,讨论其与经典问题解的转换关系,并结合实例,利用测点温度变化曲线的拐点求算模型参数。文中提出的求解方法,边界条件不参与繁杂的变换过程,解法便捷。

**关键词**:指数衰减;Laplace 变换;通用理论解;卷积;拐点法

**中图分类号**:O175.2;O302　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2022.06.014



# The solution to one-dimensional heat conduction problem bounded by the exponential decay condition and its application

WEI Ting[1],TAO Yuezan[1],REN Honglei[1],WU Dan[2]

(1. College of Civil Engineering,Hefei University of Technology,230009 Hefei,China;
2. Department of Architectural Engineering,Hefei University,230601 Hefei,China)

**Abstract**: For the one-dimensional heat conduction problem bounded by the exponential decay condition,it is hard to find the inversion of the product of the general solution of the universal equation and the image function of the boundary condition after Laplace transform,thus increasing the difficulty in solving the problem. The general theoretical solution of one-dimensional heat conduction problem is established by using properties of Laplace transform and operating the boundary condition during the transformation process with operators. For specific problems,the boundary conditions are substituted into the general theoretical solution to obtain the corresponding solutions. According to the solution when the boundary condition is exponential decay function,the transformation relationship between the solution and that of classical problem is discussed,and the corresponding parameter for the model is calculated by using the inflection point of the temperature measurement variation curve. The proposed solving method is convenient because the boundary conditions do not participate in the complicated transformation process.

收稿日期:2021-03-26　　修回日期:2021-06-21
基金项目:清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室 2020 年度开放基金资助项目(No. sklhse-2020-D-06)
通信作者:陶月赞,教授。E-mail: taoyuezan@163.com
引用格式:韦婷,陶月赞,任红蕾,等. 具指数衰减函数边界的一维热传导问题的解及其应用[J]. 应用力学学报,2022,39(6):1135-1139,1202.
WEI Ting,TAO Yuezan,REN Honglei,et al. The solution to one-dimensional heat conduction problem bounded by the exponential decay condition and its application[J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(6):1135-1139,1202.

**Key words**: exponential attenuation; Laplace transform; general theoretical solution; convolution; inflection-point method

热传导方程,是偏微分方程中最重要的发展方程,是空气动力学、弹性力学、电动力学、流体动力学、近场动力学、量子力学、等离子体物理、数字信号处理等领域的基本理论方程[1-2];热传导问题的研究方法,对上述领域相关问题研究大多有借鉴意义[3];也即,热传导问题的研究成果可为上述力学领域的研究提供理论支撑。

对于一类边界作用下的温度场,将边界处的温度 $T(t)$ 假定为已知常数 $\Delta T_0$(即,边界温度在初始瞬时获得升幅 $\Delta T_0$ 并保持不变),则构成经典的一维热传导问题[4-6];此时,可利用 Laplace 变换等积分变换方法求解[6-10],这也是这类问题的基本解。

自 Joseph Fourier 于 1822 年建立起第一个热传导模型[4]以来,热传导问题一直是数学物理方法研究的基础内容之一[6-7],但时至今日仍有一些比较常见的问题难以直接应用 Laplace、Fourier 等常用的变换方法求解,如边界温度瞬时上升 $\Delta T_0$ 后按牛顿冷却定律衰减[11]的传热问题、污染源浓度持续衰减下的浓度场[12]等问题。当边界条件 $\varphi(t)$ 为指数衰减型函数 $\Delta T_0 e^{-\lambda t}$ 时,利用 Laplace 变换进行模型求解过程中,需要对模型正变换后常微分方程的通解 $\exp(-x\sqrt{s/a})$ 与边界函数的象函数 $1/(s+\lambda)$ 的乘积组合 $\exp(-x\sqrt{s/a})/(s+\lambda)$ 进行求逆,而这一乘积组合求逆困难,因此无法直接求解。

由于复杂函数边界作用下的热传导问题求解析解过程的复杂性,导致这方面的理论研究和应用较少[13];但解析解在相应研究中又显得十分重要[14-15]。对上述问题,直接应用现有文献无法求解,故本研究根据 Laplace 变换的特点,对边界条件函数不直接进行变换运算,而是用算符将其运行于求解过程中,系统应用 Laplace 逆变换的卷积定理、微分性质、卷积微分[6-7],建立问题的通用理论解,再将边界条件代入通用理论解,求出实际问题的解析解;这种求解方法,可为类似问题求解提供一种不需要繁杂变换过程的便捷求解方法。

## 1 基本模型

以一端设置有热源的薄层材料为例(图1)。材料中传热问题的特点,可概括为:试验材料均质各向同性,在 $x$ 方向上无限延伸;材料一端设置成有形 Dirichlet 边界的热源,材料与边界外表面皆为隔热面;材料与边界的初始温度 $T(x,0)=0$,温度场过余温度记为 $T(x,t)$;边界温度随时间的变化函数记为 $\varphi(t)$;热源在薄层材料中的传热为一维热传导,边界附近温度场变化见图2。

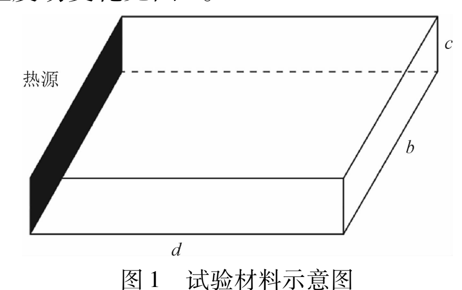



图1 试验材料示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the tested material

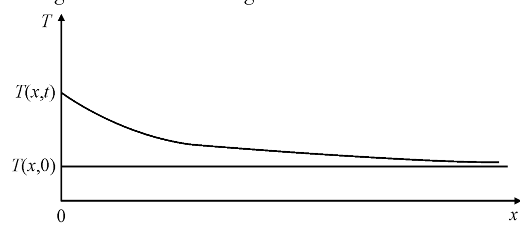



图2 Dirichlet 边界附近温度场空间变化示意图

Fig. 2 Spatial variation diagram of the temperature field near the Dirichlet boundary

上述热传导问题,可写成数学模型(Ⅰ)如下。

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ 0<x<+\infty,\ t>0 \tag{1}$$

$$T(x,t)\big|_{t=0}=T(x,0),\ x>0 \tag{2}$$

$$T(x,t)\big|_{x=0}=T(0,0)+\varphi(t),\ t>0 \tag{3}$$

$$T(x,t)\big|_{x\to\infty}=T(x,0),\ t>0 \tag{4}$$

其中 $a$ 为固体材料的热扩散率或导温系数,$m^2/s$。

令 $u(x,t)=T(x,t)-T(x,0)$,则模型(Ⅰ)可表达为模型(Ⅱ)[4],即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<+\infty,\ t>0 \tag{5}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=0,\ x>0 \tag{6}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=\varphi(t),\ t>0 \tag{7}$$

$$u(x,t)\big|_{x\to\infty}=0,\ t>0 \tag{8}$$

在 $\varphi(t)$ 有确定函数如经典模型中的常数 $\Delta T_0$ 时,模型(Ⅱ)可利用 Laplace 变换进行求解。

## 2 通用理论解

在不依赖 $\varphi(t)$ 的积分变换与逆变换过程的前

提下，根据变换的性质，先给出这一类模型通用的理论解。

对模型(Ⅱ)求对于 $t$ 的 Laplace 变换，可得模型(Ⅲ)如下。

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\frac{s}{a}\bar{u}=0 \tag{9}$$

$$\bar{u}|_{x=0}=L[\varphi(t)] \tag{10}$$

$$\bar{u}|_{x\to\infty}=0 \tag{11}$$

其中：$\bar{u}$ 为 $u$ 关于 $t$ 的 Laplace 变换的象函数；$s$ 为 Laplace算子；$L$ 和 $L^{-1}$ 分别为 Laplace 变换算符与逆变换算符。

变换过程中，边界条件式(7)变换为式(10)时，不直接求其象函数，而只用算符将其运行于过程中。

模型(Ⅲ)中式(9)的通解为

$$\bar{u}(x,s)=c_1\exp\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\cdot x\right)+c_2\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a}}\cdot x\right) \tag{12}$$

其中，$c_1$、$c_2$ 为待定常数。

由定解条件式(10)～(11)，模型(Ⅲ)的特定解为

$$\bar{u}(x,s)=L[\varphi(t)]\cdot\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a}}\cdot x\right) \tag{13}$$

特别指出，当 $T(t)$ 是指数衰减型函数 $\Delta T_0 e^{-\lambda t}$ 时，$L[T(t)]=L(\Delta T_0 e^{-\lambda t})=\Delta T_0/(s+\lambda)$，对于 $\exp(-x\sqrt{s/a})/(s+\lambda)$ 求 Laplace 逆变换困难；所以，对 $\Delta T_0 e^{-\lambda t}$ 不直接求其象函数的条件下，利用 Laplace 变换的性质，用算符将边界函数运行于变换过程中。

对式(13)进行 Laplace 逆变换，注意“Laplace 逆变换的卷积定理”，有

$$\begin{aligned}u(x,t)&=L^{-1}[\bar{u}(x,s)]\\&=L^{-1}\left[L(\varphi(t))\cdot\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a}}\cdot x\right)\right]\\&=L^{-1}[L(\varphi(t))]*L^{-1}\left[\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a}}\cdot x\right)\right]\\&=\varphi(t)*L^{-1}\left[\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a}}\cdot x\right)\right]\end{aligned} \tag{14}$$

其中 * 为卷积算符。

注意应用“互补误差函数 erfc($u$)”的 Laplace 逆变换，则有

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a}}\cdot x\right)\right]=\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{+\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta \tag{15}$$

为将式(15)应用于式(14)，需对式(14)进一步整理展开，由 Laplace 逆变换的“微分性质”，有

$$\begin{aligned}&L^{-1}\left[\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a}}\cdot x\right)\right]=\\&L^{-1}\left\{s\cdot\left[\frac{1}{s}\cdot\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a}}\cdot x\right)\right]\right\}=\\&\frac{d}{dt}\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s}\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a}}\cdot x\right)\right]\right\}=\\&\frac{d}{dt}\left[\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right]\end{aligned} \tag{16}$$

由式(14)和式(16)，有

$$u(x,t)=\varphi(t)*\frac{d}{dt}\left[\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right] \tag{17}$$

根据 Laplace 变换的“卷积微分”性质可得

$$\begin{aligned}&\varphi(t)*\frac{d}{dt}\left[\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right]+\varphi(t)\cdot\left[\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\Big|_{t=0}\right]=\\&\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)*\frac{d[\varphi(t)]}{dt}+\varphi(t)\Big|_{t=0}\cdot\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\end{aligned} \tag{18}$$

因为 $\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\Big|_{t=0}=0$，由式(17)～(18)整理可得

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\varphi(t)|_{t=0}\cdot\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)+\\&\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)*\frac{d[\varphi(t)]}{dt}\end{aligned} \tag{19}$$

注意 $u(x,t)=T(x,t)-T(x,0)$，应用卷积的交换律，式(19)写成积分形式为

$$\begin{aligned}T(x,t)=&T(x,0)+\varphi(t)|_{t=0}\cdot\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)+\\&\int_0^t\frac{d[\varphi(\zeta)]}{dt}\cdot\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\zeta)}}\right)d\zeta\end{aligned} \tag{20}$$

式(20)是在对 $\varphi(t)$ 未进行直接变换的条件下，获得的模型解，解中含有 $\varphi(t)$；具体到实际问题应用中时，还需要代入已知的 $\varphi(t)$ 后再进一步展开，方能获得实际问题的解。也即，式(20)对任意 $\varphi(t)$ 都成立，故式(20)是模型的通用理论解。

需要说明的是，上述方法求解过程中，虽然 $\varphi(t)$ 未进行形式上的变换，但 $\varphi(t)$ 实质上参与了变换与逆变换过程；所以，$\varphi(t)$ 必须满足 Laplace 变换对函数的基本要求，即：函数 $\varphi(t)$ 在有限区间内可积[13]；在 $t$ 趋于无穷大的时候，$|\varphi(t)|$ 与衰减因子的乘积

趋于0;指数衰减函数 $\Delta T_0 e^{-\lambda t}$ 为边界条件作用下的传热问题,显然满足上述要求。

# 3 边界为指数衰减函数时的解

## 3.1 问题的解

边界温度瞬时升高 $\Delta T_0$ 后按牛顿冷却定律自然冷却,即边界温度 $\varphi(t)=T(0,0)+\Delta T_0 e^{-\lambda t}$,由于 $T(x,t)$ 为温度场过余温度,记 $T(0,0)=T(x,0)=0$,则 $\varphi(t)=\Delta T_0 e^{-\lambda t}$,代入到式(20)中,有

$$T(x,t)=\Delta T_0\cdot \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)-\lambda\cdot\Delta T_0\int_0^t e^{-\lambda\zeta}\cdot \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\zeta)}}\right)\mathrm{d}\zeta \quad (21)$$

将边界条件直接代入这类问题的通用理论解式(20),这种求解方法省略了繁杂的变换过程,不仅可获得指数衰减函数边界条件下的解析解,也为边界条件为其它形式函数的这类问题求解提供了参考。

## 3.2 特定解

当 $\lambda=0$ 时,此条件下 $\varphi(t)=\Delta T_0$,对应的物理意义是边界温度瞬时变化 $\Delta T_0$ 后保持不变,这也是经典问题中的边界条件。

此时,式(21)右端第二项为0,转化为经典问题的解,即经典问题的解是式(21)的特例。

# 4 解的应用

## 4.1 模型参数求算方法

在试验中,利用温度场温度动态监测数据,计算试验材料的热物性参数、也即模型中的参数热扩散率或导温系数,是这类问题研究的重要目的之一。

借鉴文献[16-18](河渠附近潜水渗流力学模型)提出的方法原理,距离边界 $x$ 处,温度变动速度 $\psi(x,t)=\partial T(x,t)/\partial t$,由式(21)得

$$\psi(x,t)=\frac{\Delta T_0}{2\sqrt{\pi a}}t^{-\frac{3}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)+\lambda\Delta T_0\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \quad (22)$$

则 $\psi(x,t)$ 的变化速率为

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\Delta T_0\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}t^{-\frac{5}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)\cdot\left[-\frac{3}{2}+\frac{x^2}{4at}+\lambda t\right] \quad (23)$$

由式(22)可知,$\psi(x,t)$-$t$ 曲线上,存在一个拐点。

令 $\partial\psi(x,t)/\partial t=0$,求得拐点处的时间 $t_g$ 为

$$t_g=\begin{cases}\dfrac{1}{2\lambda}\cdot\left[\dfrac{3}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{\lambda x^2}{a}}\right] & (24)\\[2ex] \dfrac{1}{2\lambda}\cdot\left[\dfrac{3}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{\lambda x^2}{a}}\right] & (25)\end{cases}$$

根据距边界 $x$ 处的材料温度动态,绘出 $\psi(x,t)$-$t$ 曲线(此时 $x$ 为一确定值);利用曲线的拐点 $t_g$,以及边界温度实际变动数据而获得的 $\Delta T_0$、$\lambda$(其中,$\lambda>0$ 表示边界温度下降;$\lambda<0$ 表示边界温度上升),计算出模型参数 $a$。

值得指出的是,不论 $\lambda$ 的正负,在 $\Delta T_0$、$\lambda$ 为固定值的单调函数型边界条件作用下,温度场中任意一点的温度变化速度曲线不可能存在2个拐点;即关于 $t_g$ 算式(24)、(25)只有其中一个是合理的。当 $\lambda<0$ 时,算式(24)中 $t_g<0$,与问题的物理意义不符,即式(24)不具普适性;式(25)的计算结果不产生上述矛盾,即式(25)具有普适性。故可依据温度场中 $x$ 点实测 $\psi(x,t)$-$t$ 曲线,由式(25)计算出模型参数 $a$(此时,$\Delta T_0$、$\lambda$、$x$ 均已知)。

## 4.2 实例研究

在地源热泵应用中,地下埋管换热器的设计尤为重要,而其设计的关键要素就是获得准确的岩土热物性参数[19]。本研究在合肥工业大学建筑艺术馆地源热泵示范工程项目的5号观测孔取一岩土试件,对岩土的热扩散率进行相应的试验。该试件(图1) $d=3.0$ m、$b=1.5$ m、$c=0.3$ m;在 $b$ 的一端预设置一外径为0.25 m的钢管(钢管及岩土试件四周及上下),进行隔热保护。在试件中距钢管0.3 m处设置测温光纤,对温度进行连续测试。

在一次连续10 h的试验中,混凝土试件的初始温度与室内空气温度都为18 ℃;试验开始时,将36 ℃的油迅速注入钢管中,之后油温缓慢自然冷却,至试验结束时油温为22 ℃。试验中,充满油的钢管形成岩土试件的边界,油温自然冷却符合牛顿冷却定律;距边界0.3 m($x=0.3$ m)处,测点温度

$T(x,t)$ 及温度变动速度 $\psi(x,t)$，摘录整理见表 1、图 3。

由图 3，$\psi(x,t)$-$t$ 曲线拐点出现时间 $t_g=2.65$ h；利用式(25)，求得 $a=1.94\times10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$，这在试验地段岩性热物性参数的经验值范围内[20]。

**表 1　$x=0.3$ m 处温度测量值**

Tab. 1 Temperature measurements at $x=0.3$ m

| $t$/h | $T(x,t)$ /℃ | $\psi(x,t)$ /(℃·h$^{-1}$) |
|---|---|---|
| 0.5 | 18.14 | 0.28 |
| 1.0 | 19.35 | 2.42 |
| 1.5 | 21.19 | 3.68 |
| 2.0 | 23.33 | 4.28 |
| 2.5 | 25.61 | 4.56 |
| 3.0 | 27.85 | 4.48 |
| 3.5 | 29.92 | 4.14 |
| 4.0 | 31.85 | 3.86 |
| 5.0 | 35.21 | 3.36 |
| 6.0 | 38.20 | 2.99 |

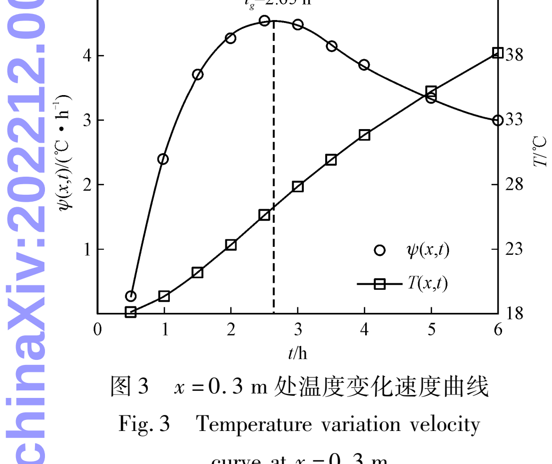



图 3　$x=0.3$ m 处温度变化速度曲线

Fig. 3　Temperature variation velocity curve at $x=0.3$ m



## 5　结　论

通过上述研究得出结论如下。

1)对于边界条件为指数衰减函数 $\Delta T_0 e^{-\lambda t}$ 的一维热传导问题，往往难以直接利用 Laplace 变换进行模型求解；此时，系统应用 Laplace 逆变换的卷积定理、微分性质、卷积微分性质，建立模型的通用理论解，再将边界条件代入通用理论解，求出实际问题的解析解。

2)本研究提出的通用理论解，对一维热传导问题具有通用性；这将为复杂边界条件下的类似问题研究，提供一种省略繁杂变换过程的简单、便捷的求解方法。

**参考文献：**


[1] 熊辉，杨光. 复变量热传导方程的动力系统[J]. 应用数学和力学，2014，31(9)：1655-1602.
XIONG Hui，YANG Guang. Dynamics of a complex-valued heat equation[J]. Applied mathematics and mechanics，2014，31(9)：1655-1602 (in Chinese).

[2] 王彩云，姜冬菊，黄丹. 基于常规态型近场动力学的热力耦合变形破坏分析[J]. 应用力学学报，2020，37(3)：938-945.
WANG Caiyun，JIANG Dongju，HUANG Dan. Coupled thermo-mechanical deformation and failure analysis based on ordinary state-based peridynamics[J]. Chinese journal of applied mechanics，2020，37(3)：938-945 (in Chinese).

[3] 陶月赞，姚梅. 地下水渗流力学发展进程与动向[J]. 吉林大学学报(地球科学版)，2007，37(2)：221-230.
TAO Yuezan，YAO Mei. Development process and tendency of the hydrodynamics of groundwater[J]. Journal of Jilin University (earth science edition)，2007，37(2)：221-230 (in Chinese).

[4] OZISIK M N. Boundary value problems of heat conduction[M]. New York：Dover Publications，1989.

[5] 傅立叶. 热的解析理论[M]. 桂质亮，译. 北京：北京大学出版社，2008.

[6] 姜玉山，徐延钦，王晓敏，等. 数学物理方程[M]. 北京：清华大学出版社，2014.

[7] 苏变萍，陈东立. 复变函数与积分变换[M]. 北京：高等教育出版社，2018.

[8] POVSTENKO Y，KLEKOT J. Fractional heat conduction with heat absorption in a sphere under Dirichlet boundary condition[J]. Computational & applied mathematics，2018，37(111)：1-9.

[9] POVSTENKO Y. Time-fractional heat conduction in a half-line domain due to boundary value of temperature varying harmonically in time[J]. Mathematical problems in engineering，2016，2016：1-7.

[10] FABRE A，HRISTOV J. On the integral-balance approach to the transient heat conduction with linearly temperature-dependent thermal diffusivity[J]. Heat and mass transfer，2016，53(1)：177-204.

[11] 詹士昌. 牛顿冷却定律适用范围的探讨[J]. 大学物理，2000，19(5)：36-37.
ZHAN Shichang. The available range of Newton's law of cooling[J]. College physics，2000，19(5)：36-37 (in Chinese).

[12] 李元杰，王森杰，张敏，等. 土壤和地下水污染的监控自然衰减修复技术研究进展[J]. 中国环境科学，2018，38(3)：1185-1193.
LI Yuanjie，WANG Senjie，ZHANG Min，et al. Research progress of monitored natural attenuation remediation technology for soil and groundwater pollution[J]. China environmental science，2018，38(3)：1185-1193 (in Chinese).

[13] 滕岩梅. 积分变换中常见问题[J]. 大学数学，2015，31(1)：105-109.
TENG Yanmei. Some problems in integral transform[J]. College mathematics，2015，31(1)：105-109 (in Chinese).


(下转第 1202 页)

Baltimore longitudinal study of aging[J]. Journal of biomechanics, 2011,44(10):1974-1979.

[25] OBREBSKA P, SKUBICH J, PISZCZATOWSKI S. Gender differences in the knee joint loadings during gait[J]. Gait & posture, 2020,79:195-202.

[26] CLEMENT J,TOLIOPOULOS P,HAGEMEISTER N,et al. Healthy 3D knee kinematics during gait: Differences between women and men,and correlation with X-ray alignment[J]. Gait & posture,2018, 64:198-204.

[27] EMA R,WAKAHARA T,HIRAYAMA K,et al. Effect of knee alignment on the quadriceps femoris muscularity:Cross-sectional comparison of trained versus untrained individuals in both sexes[J]. Plos one,2017,12:0183148.

[28] 邓力勤,张希妮,肖松林,等. 内侧腓肠肌-跟腱复合体形态学和力学特性的性别差异研究[J]. 应用力学学报,2022,39(2):218-223.
DENG Liqin,ZHANG Xini,XIAO Songlin,et al. Differences in morphological and mechanical properties of medial gastrocnemius-achilles tendon unit between males and females[J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(2):218-223(in chinese).

[29] FRANZ J R,KRAM R. Advanced age and the mechanics of uphill walking:A joint-level,inverse dynamic analysis[J]. Gait & posture, 2014,39(1):135-140.

[30] BOYER K A,JOHNSON R T,BANKS J J,et al. Systematic review and meta- analysis of gait mechanics in young and older adults[J]. Experimental gerontology,2017,95:63-70.

[31] FRANZ J R. The Age-associated reduction in propulsive power generation in walking[J]. Exercise and sport sciences reviews,2016,44(4):129-136.

[32] LEE H J,CHANG W H,CHOI B O,et al. Age-related differences in muscle co-activation during locomotion and their relationship with gait speed:A pilot study[J]. BMC Geriatrics,2017,17(1):44.

(编辑 张璐)

(上接第 1139 页)

[14] 唐松花,罗迎社,彭相华. 火灾情况下混凝土板温度场的解析解[J]. 应用力学学报,2013,30(4):544-549.
TANG Songhua, LUO Yingshe, PENG Xianghua. Analytical solutions of temperature field in the concrete slab on fire[J]. Chinese journal of applied mechanics,2013,30(4):544-549(in Chinese).

[15] 唐松花,崔宇鹏. 火灾高温下混凝土柱温度场的解析解[J]. 应用力学学报,2018,35(6):1361-1366.
TANG Songhua, CUI Yupeng. Analytical solutions of temperature field in the concrete column on fire[J]. Chinese journal of applied mechanics,2018,35(6):1361-1366(in Chinese).

[16] 陶月赞,姚梅,张炳峰. 时变垂向入渗影响下河渠-潜水非稳定渗流模型的解及应用[J]. 应用数学和力学,2007,28(9):1047-1053.
TAO Yuezan,YAO Mei,ZHANG Bingfeng. Solution and its application of transient stream/groundwater model subjected to time-dependent vertical seepage[J]. Applied mathematics and mechanics, 2007,28(9):1047-1053(in Chinese).

[17] 吴丹,陶月赞,林飞. 河渠水位线性变化条件下河渠-潜水-非稳定流模型及其解[J]. 应用数学和力学,2018,39(9):1043-1050.
WU Dan,TAO Yuezan,LIN Fei. Solution of the transient stream-groundwater model with linearly varying stream water levels[J]. Applied mathematics and mechanics,2018,39(9):1043-1050(in Chinese).

[18] 吴丹,陶月赞,林飞. 复杂函数边界控制下的潜水非稳定流模型及解的应用解[J]. 水利学报,2018,49(6):725-731.
WU Dan,TAO Yuezan,LIN Fei. Application of unsteady phreatic flow model and its solution under the boundary control of complicated function[J]. Journal of hydraulic engineering,2018,49(6):725-731(in Chinese).

[19] 单奎,张小松,李舒宏. 一种现场测定土壤源热泵岩土热物性的新方法[J]. 太阳能学报,2010,31(1):22-26.
SHAN Kui,ZHANG Xiaosong,LI Shuhong. A method for measuring thermal properties of ground[J]. Acta energiae solaris Sinica, 2010,31(1):22-26(in Chinese).

[20] 吴丹. 地源热泵高效换热系统热运移模型研究[D]. 合肥:合肥工业大学,2019.

(编辑 李坤璐)